ИССЛЕДОВАНИЯ В ОБЛАСТИ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

(под редакцией академика НАН Украины Е.Я. ХРУСЛОВА)

Становление математического отделения

Практически одновременно с созданием ФТИНТа в нем были организованы математические отделы, в которых предполагалось вести исследования по фундаментальной и прикладной математике, ориентированной на тематику института. Такое, на первый взгляд, неожиданное решение директора института Б.И. Веркина во многом объяснялось тем, что в харьковских вузах работал ряд талантливых, сравнительно молодых, но уже известных математиков: Н.И. Ахиезер, А.В. Погорелов, В.А. Марченко, А.Д. Мышкис, И.М. Глазман. Были организованы три математических отдела: теории функций, геометрии и математической физики. Возглавили эти отделы Н.И. Ахиезер, А.В. Погорелов и В.А. Марченко. Перед ними ставилась двойная цель: математики должны были, с одной стороны, участвовать в научных программах института и в идеале стать одним из звеньев в творческой цепи: физики—математики—конструкторы—производство, а с другой — проводить исследования по фундаментальным проблемам математики. Дальнейший ход событий полностью подтвердил дальновидность этого решения.

Постепенно математический сектор института расширялся. В 1962 г. директор института Б.И. Веркин предложил профессору Харьковского авиационного института А.Д. Мышкису организовать во ФТИНТе отдел прикладной математики, основу которого составили выпускники ХАИ. В 1963 г., в связи с возвращением Н.И. Ахиезера в университет, отдел теории функций был расформирован, а его ведущие сотрудники перешли во вновь организованный отдел функционального анализа и вычислительной математики. Заведующим отделом был назначен И.М. Глазман.

В 1969 году был организован новый отдел теории функций. В него вошли профессор ХГУ И.В. Островский, доцент ХАИ Л.И. Ронкин и ряд молодых перспективных математиков — выпускников ХГУ. Возглавил отдел профессор Б.Я. Левин.

В первые годы после образования институтского комплекса математические отделы принимали активное участие в обсуждении и решении задач, стоявших перед институтом. Это особенно касалось деятельности института и его КБ, связанной с разработкой и исследованием поведения технических устройств в условиях космоса. Например, был предложен принципиально новый подход, основанный на моделировании работы камер, имитирующих космические условия, на вычислительных машинах. К тому времени в институте уже был создан и успешно работал лучший в городе вычислительный центр. Большая заслуга в этом принадлежит К.В. Маслову, который долгое время был руководителем вычислительного центра и заместителем директора института.

В институте выполнялась программа исследований поведения жидкости в различных режимах в условиях невесомости. Активное участие в этой программе принимал отдел прикладной математики, возглавляемый А.Д. Мышкисом. Институт начал работу по созданию и использованию сквидовых магнитоградиентометров, в связи с этим необходимо было научиться интерпретировать данные измерения магнитных полей изучаемых объектов. К этой задаче были привлечены сотрудники отдела математической физики. Был решен ряд обратных задач магнитотеллурического зондирования, позволяющих делать выводы о глубинном строении земной коры по измеренному на поверхности земли магнитному полю.

Необходимо отметить еще одну работу огромного масштаба, которая проводилась в институте с участием математиков, — создание сверхпроводящих электрогенераторов. Инициаторами этой работы во ФТИНТе были Б.И. Веркин и А.В. Погорелов. Оригинальная геометрическая идея Погорелова легла в основу конструкции криогенератора. Под его руководством и при участии конструкторов ОКТБ института был построен опытный образец этой машины.

Но основные усилия математических отделов были всегда направлены на решение фундаментальных проблем математики. Главные направления их деятельности относились к геометрии, теории функций, функциональному анализу, математической физике. В этих направлениях было получено много важных результатов, которые были опубликованы в центральных отечественных и зарубежных журналах и монографиях.

А.В. Погореловым были решены давно поставленные классиками задачи: четвертая проблема Гильберта (1974 г.) и многомерная проблема Минковского (1975 г.).

Некоторые исследования сотрудников математических отделов ФТИНТа положили начало новым направлениям в математике. Так, в работе В.А.Марченко и Е.Я. Хруслова “Краевые задачи с мелкозернистой границей” (1964 г.) был получен первый математически строгий результат по усреднению краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными, ставший предвестником нового направления — теории усреднения.

Аналогично, после пионерской работы В.А. Марченко и Л.А. Пастура “Спектры случайных матриц большой размерности” (1967 г.) начала интенсивно развиваться теория случайных матриц и операторов, играющая важную роль в математической и теоретической физике, в частности, в теории неупорядоченных систем.

В 1981 году в отдел математической физики пришел В.Г. Дринфельд и здесь заложил основы теории квантовых групп.

А.В. Погореловым был создан новый учебник геометрии для средней школы, и под его руководством в отделе геометрии была проведена большая работа по освоению и внедрению этого учебника в школьные программы по геометрии.

13 сентября 1986 года вышло Постановление ЦК КПСС и Совета Министров СССР “Об усилении научно-исследовательской работы по математике и ее приложениям”, и директор института Б.И. Веркин увидел в нем новые перспективы и задачи для математиков ФТИНТа. По его инициативе ФТИНТ представил в Президиум АН УССР проект о создании математического отделения института (МО ФТИНТ). Проектом предусматривалось ввести вновь созданное подразделение в научное подчинение отделению математики АН УССР с целью еще больше активизировать деятельность математиков ФТИНТа в области фундаментальной и прикладной математики.

5 октября 1987 года вышло постановление Президиума АН УССР “Об организации математического отделения ФТИНТ”. Руководителем его был назначен доктор физ.-мат. наук Л.А. Пастур (впоследствии академик НАН Украины). С 1998 г. руководителем отделения является академик Е.Я. Хруслов.

В состав математического отделения вошли такие отделы:

Отдел геометрии (зав. отделом академик НАН Украины и РАН А.В. Погорелов). Основные направления исследований: геометрия “в целом”, геометрия поверхностей и метрик, дифференциальная геометрия подмногообразий, геометрическая теория устойчивости оболочек и приложения “геометрии в целом” к механике тонкостенных оболочек. С 2000 года отдел возглавляет проф. Ю.А. Аминов.

Отдел теории функций (зав. отделом проф. Б.Я. Левин, с 1986 по 2001 год — чл.-корр. НАН Украины И.В. Островский). Основные направления исследований: теория функций одной и нескольких комплексных переменных, теория ортогональных многочленов, применение теории функций к различным областям математики. С 2002 года отделом заведует доктор физ.-мат. наук Г.М. Фельдман.

Отдел математической физики (зав. отделом академик НАН Украины и РАН В.А. Марченко). Основные направления: обратные задачи спектрального анализа и рассеяния, нелинейные эволюционные уравнения, эргодическая теория, теория квантовых групп. С 2001 года отделом заведует доктор физ.-мат. наук В.П. Котляров.

Отдел математического моделирования физических процессов. Этот отдел был организован на основе отдела прикладной математики. После того как А.Д. Мышкис переехал в Москву, отделом руководили Н.Д. Копачевский, В.П. Потапов, А.Д. Тюпцов. В 1986 г. к отделу была присоединена лаборатория математического моделирования, и заведовать отделом был назначен Е.Я. Хруслов. Основные направления исследований: в первое время — гидродинамика невесомости, обратные задачи теории электромагнитного зондирования, исследование асимптотического поведения решений нелинейных эволюционных уравнений. Затем основное внимание стало уделяться теории усреднения дифференциальных уравнений в частных производных, разработке математических моделей сложных пористых сред, моделированию движения вихрей в сверхтекучей жидкости.

В 1986 году был организован новый **отдел статистических методов в математической физике** (зав. отделом академик НАН Украины Л.А. Пастур). Основные направления: теория случайных матриц, спектральная теория случайных дифференциальных и разностных операторов, теория нейронных сетей, вопросы статистической физики и неупорядоченных систем. С 2001 года отделом заведует доктор физ.-мат. наук М.В. Щербина.

Создание математического отделения ФТИНТа благотворно повлияло на развитие математики в Харькове и в целом в Украине. В МО ФТИНТ пришли молодые талантливые математики, в основном выпускники Харьковского университета.

Сильно активизировались международные связи математического отделения. В частности, по инициативе Л.А. Пастура и профессора университета Париж-7 А. Буте де Монвель был заключен договор о сотрудничестве между МО ФТИНТ и университетом Париж-7. В рамках этого договора многие сотрудники математического отделения прошли стажировку во Франции, велась совместная подготовка аспирантов и докторантов. Было подготовлено 10 кандидатских и 2 докторских диссертации, которые были защищены в университете Париж-7.

В 1994 году начал издаваться ежеквартальный математический журнал "Математическая физика, анализ и геометрия" (с 2005 года он переименован в "Журнал математической физики, анализа и геометрии"). Этот журнал достойно продолжил традиции журнала "Сообщения Харьковского математического общества", который, с некоторыми перерывами, издавался еще со времен А.М. Ляпунова.

Научные достижения сотрудников математического отделения получили широкое международное признание. В 1990 г. на математическом конгрессе в Киото В.Г. Дринфельд был награжден Филдсовской медалью. Сотрудники МО ФТИНТ приглашались выступать с пленарными докладами на всемирных и европейских конгрессах математиков (В.Г. Дринфельд, Л.А. Пастур, 1986 г., *Беркли*; Л.А. Пастур, 1991 г., *Лейпциг*; Е.Я. Хруслов, 1994 г., *Цюрих*; Л.А. Пастур, 1996 г., *Будапешт*; М.В. Щербина, 2004 г., *Стокгольм*). А.В. Погорелов, В.А. Марченко, Л.А. Пастур были избраны почетными докторами различных университетов мира.

В настоящее время в математическом секторе ФТИНТа проводятся исследования в следующих направлениях, относящихся к числу важнейших в области математики и математической физики:

- геометрия и геометрическая теория тонких оболочек;
- теория функций комплексного переменного и ее применение к задачам математического анализа;

- теории аппроксимации;
- теории вероятности и математической статистики;
- прямые и обратные задачи спектрального анализа дифференциальных и разностных операторов и теория рассеяния;
- спектральная теория случайных операторов; метод обратной задачи рассеяния для решения нелинейных эволюционных уравнений;
- теория представлений и теория квантовых групп;
- динамические системы;
- теория усреднения дифференциальных операторов в частных производных;
- математические вопросы гидродинамики и невесомости.

Ниже приводится обзор главных результатов, полученных по этим направлениям сотрудниками института.

Геометрия

Геометрия “в целом” поверхностей и метрик. Начало исследованиям по геометрии во ФТИНТе было положено знаменитыми работами Алексея Васильевича Погорелова по теории изгибаний и однозначной определенности выпуклых поверхностей в евклидовых и неевклидовых пространствах постоянной кривизны. Еще в 1951 г. им была доказана однозначная определенность общей замкнутой выпуклой поверхности в евклидовом пространстве. Продолжая это направление, в 1960 г. А.В. Погорелов установил аналогичный результат для поверхностей в эллиптическом пространстве. Для поверхностей в пространстве Лобачевского соответствующий результат получен его учеником А.Д. Милкой.

В работах А.В. Погорелова также были получены важные теоремы о регулярности выпуклой поверхности при условии регулярности метрики. А.А. Дубровин, отталкиваясь от результатов А.В. Погорелова о регулярности выпуклой поверхности в 3-мерном римановом пространстве, доказал, что если метрика пространства и метрика поверхности принадлежат классу C^n, $n > 1$, то поверхность принадлежит классу $C^{n-1+\nu}$.

Теоремы А.В. Погорелова и А.Д. Александрова об изометрических погружениях и деформациях выпуклых поверхностей, исследования их учеников по теории поверхностей положительной кривизны подробно изложены в монографии А.В. Погорелова “Внешняя геометрия выпуклых поверхностей” (1969). Однозначная определенность гладких выпуклых гиперповерхностей в многомерном евклидовом пространстве доказана Е.П. Сенькиным (1972).

Развивая работы Кристоффеля, Минковского и Александрова, А.В. Погореловым решена проблема существования замкнутой выпуклой поверхности с функцией главных кривизн, заданной в виде четной функции от нормали поверхности (1969). Соответствующая задача для незамкнутых выпуклых поверхностей со сферическим изображением в виде выпуклой области внутри полусферы была рассмотрена А.И. Медяником.

Решение многомерной проблемы Минковского для гиперповерхностей в многомерном евклидовом пространстве потребовало применения геометрических и аналитических методов исследования многомерного аналога уравнения Монжа-Ампера и было получено А.В. Погореловым в 1975 г.

Традиционно к исследованиям по геометрии "в целом" относят работы по многогранникам и теории кривых. Еще в работах А.Д. Александрова при решении проблемы Г. Вейля о реализации метрики, заданной на 2-мерной сфере в виде выпуклой поверхности, использовался метод приближения выпуклых поверхностей многогранниками. Выпуклые многогранники в отделе геометрии рассматривались А.В. Погореловым, Е.П. Сенькиным, А.И. Медяником, А.Д. Милкой, А.М. Гуриным. В работах А.Д. Милки построены многомерные полиэдральные метрики с неотрицательной кривизной, относящиеся к классу пространств Александрова, и доказан многомерный аналог классической теоремы Кон-Фоссена о прямой линии, характеризующей цилиндрические метрики. В классе многогранников построен пример выпуклой поверхности с неспрямляемым сферическим образом кратчайшей. Предложен эффективный метод построения нежестких в малом поверхностей вращения любой степени регулярности и доказаны теоремы о реализации выпуклой шапочкой полиэдральной метрики с неположительной кривизной и об эвольвентном сматывании геодезической с выпуклой поверхности. Эти исследования нашли прикладное применение в запатентованных А.Д. Милкой новых способах штамповки крупногабаритных деталей.

Развитием классической теории изгибаний является теория линейных изгибаний многогранников. А.Д. Милкой был указан новый класс многогранников, являющихся математически жесткими, но физические модели которых являются неустойчивыми, допускающими большие деформации, подобно известным моделям математически нежестких многогранников.

В работах Ю.С. Слободяна проводились исследования римановых пространств с достаточно богатыми семействами вполнегеодезических поверхностей, был найден вид метрики этих римановых пространств, а также изучены вполнегеодезические поверхности в финслеровом пространстве. В работах В.И. Денисова изучались пространства Эйнштейна общей теории относительности. В частности, для космологической модели Геделя, которая замечательна тем, что в ней существуют замкнутые времениподобные геодезические, рассмотрены сопряженные точки и их индексы.

Геометрия подмногообразий. Геометрия подмногообразий является естественным развитием теории поверхностей. В этой теории наряду с локальными вопросами возникают и вопросы геометрии в "целом". Рассмотрение подмногообразий, у которых коразмерность больше 1, оказывается необходимым, например, при рассмотрении изометрических погружений римановых пространств отрицательной кривизны в евклидовы пространства. В приложениях к физике также появляются подмногообразия коразмерности, большей 1.

Важной наглядной характеристикой подмногообразия является его внешний диаметр. Ю.А. Аминовым была получена общая оценка для внешнего диаметра через максимум модуля вектора средней кривизны. Эта оценка в дальнейшем была обобщена в целом ряде работ Бураго, Ксавье, Йорге, Кутруфиотиса и др. В связи с проблемой С.С. Черна о неограниченности полной минимальной поверхности, в евклидовом пространстве доказана теорема о том, что полная минимальная поверхность, у которой гауссова кривизна ограничена снизу, неограничена в пространстве (Ю.А. Аминов). Д.В. Болотовым полностью решена проблема М. Громова о макроскопической размерности многообразий.

При доказательстве многомерной гипотезы С.Н. Бернштейна в работах Альмгрена, Саймонса, Лавсона и др. возникли вопросы устойчивости минимальных поверхностей. В 1975 г. Ю.А. Аминовым было доказано, что минимальная 2-мерная поверхность, гомеоморфная 2-мерной сфере, в полном односвязном ориентируемом n-мерном римановом пространстве, кривизна которого лежит в интервале (1/4,1), неустойчива. К вопросам устойчивости минимальных поверхностей обратился в 1981 г. А.В. Погорелов, который дал простой признак неустойчивости области на минимальной поверхности в 3-мерном евклидовом пространстве. С помощью этого признака он дал простое доказательство в односвязном случае известной теоремы до-Кармо и Пенга: единственной полной устойчивой минимальной поверхностью в 3-мерном евклидовом пространстве является плоскость.

Теория изометрических погружений пространств всегда занимала умы геометров. Отдельные примеры погружений областей n-мерного пространства Лобачевского в $(2n—1)$-мерное евклидово пространство были известны еще с 19-го века. В работах Ю.А. Аминова были построены и исследованы новые обширные классы погружений: с семейством линий кривизны, состоящим из геодезических линий; функционально-вырожденные погружения; погружения 3-мерного пространства Лобачевского в 5-мерное евклидово пространство с гиперплоским грассмановым образом. Последний класс неожиданно оказался связанным с классической проблемой механики о вращении твердого тела с неподвижной точкой в центральном ньютоновском поле тяготения. Именно из 12 уравнений погружения подсистема из 6 уравнений совпадает с классической системой уравнений Киргоффа. Эта система исследовалась многими известными математиками: Ляпуновым, Стекловым, Клебшем и др. Установленная основная система погружений является обобщением известного уравнения синус-Гордона, привлекающего большое внимание со стороны физиков в связи с построением многосолитонных решений. В отделе был построен многомерный аналог преобразования Бианки, переводящий подмногообразие постоянной отрицательной кривизны в подмногообразие той же кривизны. В дальнейшем Ю.А. Аминов (совместно с А. Сымом, Варшавский университет) рассмотрели преобразование Бианки двумерных поверхностей в 4-мерном евклидовом пространстве; эти исследования были продолжены в работах В.А. Горькавого и Л.А. Масальцева.

Очень интересным также является калибровочное поле, построенное с помощью изометрического погружения 4-мерного пространства Лобачевского в 7-мерное евклидово пространство. Ю.А. Аминовым были введены аналоги электрического и магнитного полей с матричными компонентами; установлено, что эти поля удовлетворяют первой группе уравнений Максвелла и некоторому аналогу второй группы. Доказан ряд теорем о непогружаемости полного n-мерного пространства Лобачевского в $(2n—1)$-мерное евклидово пространство (Ю.А. Аминов, Ю.А. Николаевский, Д.В. Болотов). Новые классы погружений областей многомерного пространства Лобачевского в евклидовы пространства с коразмерностью большей, чем $(n—1)$, построены в работах Ю.А. Аминова и О.А. Гончаровой в виде надстроек над подмногообразиями постоянной кривизны в сферах.

Ю.А. Аминовым впервые в СССР были начаты с геометрической точки зрения исследования грассманова образа подмногообразия. Рассмотрена проблема о восстановлении подмногообразия по заданному грассманову образу. Доказана теорема о существовании 2-мерной поверхности в 4-мерном евклидовом пространстве с заданным эллиптическим грассмановым образом. Найдены необходимые и достаточные условия для возможности восстановления 2-мерной поверхности в n-мерном евклидовом пространстве по заданному грассманову образу и доказана теорема единственности. Для многомерных подмногообразий теорема единственности доказана А.А. Борисенко. Исследования грассманова образа были продолжены в работах В.А. Горькавого, в частности им были найдены необходимые условия на грассманов образ подмногообразия с плоской нормальной связностью. По этим вопросам Ю.А. Аминов опубликовал монографию “Геометрия подмногообразий” (2002).

Комбинаторная геометрия. Интерес к комбинаторной геометрии значительно вырос за последние 50 лет благодаря развитию вычислительной техники, что способствовало увеличению возможностей перебора. Именно это дало толчок для развития исследований по комбинаторной геометрии в институте, который был оснащен современным вычислительным центром.

В 1980 г. А.И. Медяником получено полное решение известной проблемы Ф. Картези о возможности разбиения многомерного евклидова пространства на крестообразные многогранники, предложен и теоретически обоснован новый универсальный метод построения с помощью соответствующего алгоритма, реализованного в виде компьютерной программы, матриц Адамара порядка $4n$ полуциркулянтного типа. Этот метод, являясь геометрическим по сути, позволил решить вопрос о вписании правильного гиперсимплекса в $(4n—1)$-мерный куб (1997—2001). Установлены также необходимые и достаточные условия существования полуциркулянтных матриц Адамара порядка $4n$ в аналитической и геометрической формах (2004).

Геометрическая теория тонких оболочек. Проблема устойчивости оболочек — достаточно тонких деформируемых тел — занимает одно из центральных мест в современной механике. Ее решение исключительно актуально в связи с широким использованием тонкостенных элементов в технике. Характерной чертой проблемы является то, что даже в простейших случаях она сводится к изучению сложной, трудно поддающейся как аналитическому, так и численному решению нелинейной краевой задачи для системы дифференциальных уравнений в частных производных восьмого порядка.

Еще в 1908 г. Маллок, исследуя форму длинных тонких цилиндрических труб после потери устойчивости, высказал предположение о близости этих форм к регулярным изометрическим преобразованиям недеформируемой формы оболочки. Впоследствии к этой идее неоднократно возвращались многие ученые. Однако лишь в новом оригинальном геометрическом методе исследования устойчивости достаточно тонких выпуклых оболочек, предложенном и разработанном в работах А.В. Погорелова (1960—1966), связь между механическими свойствами оболочек и геометрическими свойствами ее формы вошла в теорию явно, как средство решения задач устойчивости. Исходная задача была упрощена и сведена к вариационной задаче для функционала, определенного на нерегулярных геометрических изгибаниях исходной недеформированной формы оболочки, что позволило зачастую получать решение в основном приближении в замкнутом виде. Исходя из идей геометрического метода А.В. Погорелова, в работах В.И. Бабенко было предсказано и изучено асимптотическими методами явление геометрически нелинейной локализации начальных послекритических деформаций, получены предельные краевые задачи устойчивости оболочек, сформулирован единый метод получения асимптотики критических нагрузок.

Применение непосредственно геометрического подхода и предельных краевых задач позволило получить качественно новые результаты о величине критических нагрузок и о характере закритического деформирования строго выпуклых и развертывающихся (в частности, цилиндрических и конических) оболочек произвольного очертания при различных способах нагружения и всевозможных естественных краевых условиях. Среди рассмотренных оболочек — линейно и нелинейно упругие (изотропные и анизотропные), упруго-пластические, разномодульные, гладкие и составные, однородные и трехслойные. Разработана и освоена принципиально новая технология изготовления геометрически совершенных оболочек для проведения экспериментальных исследований их устойчивости. Результаты экспериментальных исследований критических нагрузок, динамики потери устойчивости (хлопка), как устойчивых, так и неустойчивых ветвей диаграммы нагружения оболочек (сферических, цилиндрических и тороидальных), хорошо согласуются с теоретическими выводами.

Вопросы образования. А.В. Погореловым был создан учебник по геометрии для средней школы, который действует во многих странах СНГ с 1982 г. по настоящее время. Этот учебник сочетает в себе классический подход учебника Киселева с достаточно строгим, основанным на простой системе аксиом, изложением. Учебник ориентирован на то, чтобы научить учеников мыслить логически. В период 1979—1982 гг. он прошел экспериментальную проверку в школах Харькова и других городов бывшего СССР. Большая помощь учителям и методистам по освоению учебника была оказана сотрудником отдела геометрии А.И. Медяником, которому было присвоено звание отличника народного образования Украины.

В дополнение к школьному учебнику А.В. Погореловым был написан известнейший учебник “Геометрия” для вузов.

Теория функций и ее применения

Исследования в этой области проводятся во ФТИНТе в отделе теории функций, основателем которого был Б.Я. Левин. Математические работы Б.Я. Левина открывали новые подходы и новые направления исследований, которые впоследствии разрабатывались многими математиками во всем мире и на многие годы определили направления исследований в математическом отделении ФТИНТа.

Б.Я. Левиным (и независимо от него — А. Пфлюгером) была создана теория целых функций вполне регулярного роста, а его монография “Распределение корней целых функций” до настоящего времени является настольной книгой многих математиков.

Б.Я. Левин разработал теорию, которая привела к новому пониманию и к далеким обобщениям классической теоремы С.Н. Бернштейна о производной целой функции экспоненциального типа. Он ввел операторы преобразования для уравнения Штурма—Лиувилля, сохраняющие асимптотику решений на бесконечности. Эти операторы являются основным инструментом в теории обратных задач рассеяния.

Знаменитая работа Б.Я. Левина и И.В. Островского содержала новый подход к классическим задачам о распределении нулей производных вещественных целых функций, восходящим к Лагерру, Виману и Полиа. Эта работа определила направление и методы исследований в этой области в последние полвека. Ее дальнейшее развитие привело в начале 2000-х годов к полному доказательству главных гипотез о распределении нулей последовательных производных, высказанных А. Виманом (1911) и Д. Полиа (1943).

Развитые Б.Я. Левиным новые методы в теории негармонических рядов Фурье позволили по-новому переосмыслить классические результаты Винера—Пэли и Левинсона и, в конечном счете, привели к полному описанию базисов Рисса из экспонент в $L_2(-\pi, \pi)$. В рамках подхода Б.Я. Левина и под влиянием работы В.А. Марченко — И.В. Островского новый подход к этой проблеме был предложен А.Э. Еременко и М.Л. Содиным, который привел к параметрическому описанию последовательностей $\{e^{i\lambda_k x}\}$ (с вещественными λ_k), являющимися безусловными базисами Рисса.

Б.Я. Левин внес ценный вклад в теорию весовой полноты многочленов и линейных комбинаций экспонент и тесно связанную с ней теорию квазианалитических классов функций. В 90-х годах это направление активно развивалось сотрудниками отдела теории функций. Новые результаты были получены А.Е. Фрынтовым (решение задачи П. Кусиса о весовой полноте многочленов в пространстве $L_2(\mu)$, где мера сосредоточена в точках $\{n^p\}_{n\in N}$, $p > 2$), М.Л. Содиным (задача Мергеляна—Эренпрайса о полноте многочленов в весовых пространствах с асимметричным весом) и М.Л. Содиным (совместно с А.А. Боричевым) — исследование канонических решений неопределенной проблемы моментов Гамбургера, П.М. Юдицким (решение задачи К. Берга об устойчивости полноты многочленов в пространстве $L_2(\mu)$ при экспоненциально малых возмущениях меры μ).

Созданная Б.Я. Левиным теория субгармонических мажорант позволила решить ряд экстремальных задач в различных классах целых функций и ряд задач о квазианалитичности. С помощью этой техники А.Ю. Рашковским было дано полное описание радиальных проекций гармонических мер ограниченных звездных областей, что позволило усилить классические теоремы Левинсона—Сьоберга.

И.В. Островским были получены фундаментальные результаты в арифметике вероятностных законов. Ему удалось значительно развить метод Ю.В. Линника и получить существенное продвижение в проблеме описания класса I_0 вероятностных распределений, не имеющих неразложимых компонент. Опубликованная на эту тему монография “Разложения случайных величин и векторов” (совместно с Ю.В. Линником) получила широкое международное признание.

В цикле работ 80-х годов И.В. Островским (совместно с А.А. Гольдбергом и рядом своих учеников) подробно исследовано асимптотическое поведение целых характеристических функций и распределение их корней. В частности, получено описание индикаторов целых характеристических функций конечного порядка и нулевых множеств целых характеристических функций.

В начале 90-х годов И.В. Островский опубликовал цикл работ, относящихся к теории краевой задачи Римана с бесконечным индексом. В них существенно ослаблены условия, обеспечивающие ее разрешимость.

Цикл работ И.В. Островского посвящен исследованию классов комплекснозначных мер, в которых имеет место однозначная определенность сужениями на полуось. Оказалось, что этот круг вопросов тесно связан со многими классическими задачами теории функций: теоремой Титчмарша о свертке, второй основной теоремой Неванлинны—Картана для аналитических вектор-функций, факторизацией функций в классах Харди и др.

Еще одно направление исследований И.В. Островского связано с изучением зависимости между частотой осцилляций вещественной функции (распределения) и гладкостью ее преобразования Фурье. Отправной точкой этих исследований явилась гипотеза Дж. Хиггинса и В. Уолкера о том, что в классе функций Винера—Пэли нет неосциллирующих, то есть таких функций, все производные которых имеют только конечное число вещественных нулей. В совместных работах с А.М. Улановским эта гипотеза была опровергнута, и класс неосциллирующих функций был подвергнут глубокому изучению.

Монография И.В. Островского (совместно с А.А. Гольдбергом), посвященная теории мероморфных функций, написанная более 30 лет тому назад, до сих пор не утратила своей актуальности. В 2008 г. она была издана Американским математическим обществом.

Развивая идеи Ю.В. Линника и И.В. Островского, Г.П. Чистяков создал новый аналитический метод получения оценок устойчивости разложений широких классов безгранично делимых законов. В частности, им и Л.Б. Голинским были найдены точные в смысле порядка оценки устойчивости теоремы Г. Крамера о разложении закона Гаусса, теоремы Д.А. Райкова о разложениях закона Пуассона, теоремы Ю.В. Линника о разложениях свертки законов Гаусса и Пуассона.

Г.П. Чистяков создал новый подход к проблеме описания класса I_0, связанный с использованием оценок устойчивости разложений широких классов безгранично делимых законов. С помощью этого подхода ему удалось дать полное описание класса I_0 в классе решетчатых законов и законов с гауссовой компонентой и характеристическими функциями, аналитическими в окрестности нуля. Как следствие этих результатов, была решена задача Ю.В. Линника об условиях принадлежности классу I_0 законов с гауссовой компонентой и целыми характеристическими функциями.

В 1953 г. А.Н. Колмогоров поставил задачу о нахождении точной постоянной в неравенстве Берри—Эссена, которая не решена до сих пор. Кроме того, он поставил задачу о нахождении асимптотически правильной постоянной в центральной предельной теореме Ляпунова в классах слагаемых с фиксированной дробью Ляпунова. Развивая классические подходы Эссена и Линника, Г.П. Чистякову удалось получить новое асимптотическое разложение в теореме Ляпунова и с его помощью решить задачу Колмогорова об асимптотически правильных постоянных в этой теореме.

В последние 20 лет интенсивно развивается так называемая свободная теория вероятностей. Основным понятием этой новой теории является понятие свободы некоммутативных случайных величин, введенное Д.В. Войкулеску. Опираясь на теорию неванлиновских функций, Г.П. Чистякову (совместно с Ф. Гетце) удалось найти аналоги предельных теорем для неодинаково распределенных свободных случайных величин и доказать основные теоремы арифметики вероятностных мер в полугруппе вероятностных мер относительно операций аддитивной и мультипликативной свободных сверток.

Исследования И.В. Островского по арифметике вероятностных законов были продолжены Г.М. Фельдманом, который построил теорию разложений случайных величин, принимающих значения в локально компактной абелевой группе X. Оказалось, что справедливость на группе X той или иной арифметической теоремы не только зависит от структуры группы X, но и определяет эту структуру. Г.М. Фельдманом, в частности, были полностью описаны группы, на которых справедлив аналог теоремы Крамера о разложении гауссовского распределения. Им и А.Е. Фрынтовым на группы, связная компонента нуля которых не содержит подгруппы топологически изоморфной бесконечному тору, перенесена теорема Ю.В. Линника о принадлежности классу I_0 свертки гауссовского и пуассоновского распределений. Полностью охарактеризованы группы, на которых класс I_0 плотен в классе всех безгранично делимых распределений, и группы, на которых класс I_0 является базисом в классе всех безгранично делимых распределений (аналоги теорем И.В. Островского). Получены обобщения теорем Д.А. Райкова, П. Леви, И.В. Островского, Р. Кюппана о принадлежности классу I_0 обобщенного распределения Пуассона.

В последние десятилетия большое внимание уделялось перенесению характеризационных теорем математической статистики на различные алгебраические структуры, такие, как локально компактные абелевы группы, группы Ли, квантовые группы, симметрические пространства. Г.М. Фельдман разработал методы, позволившие ему доказать групповые аналоги классических характеризационных теорем математической статистики (теоремы М. Каца — С.Н. Бернштейна, Д. Полиа, Ю.В. Линника, В.П. Скитовича — Г. Дармуа) в ситуации, когда случайные величины принимают значения в различных классах локально компактных абелевых групп (дискретные, компактные и др.). Ряд важных характеризационных теорем на связных группах размерности 2 были доказаны в работах Г.М. Фельдмана и М.В. Миронюк. На основе полученных Г.М. Фельдманом результатов им были написаны две монографии, изданные Американским математическим обществом в 1993 г. и Европейским математическим обществом в 2008 г.

Теория роста и распределения нулей целых функций многих переменных была развита Л.И. Ронкиным. По этим вопросам им написана книга “Введение в теорию целых функций многих переменных”. Л.И. Ронкиным получены основополагающие результаты в таких вопросах многомерного комплексного анализа, как квазианалитические классы функций, дискретные множества единственности и полнота систем экспонент, сепаратно-аналитические функции, интерполяция с алгебраических и псевдоалгебраических множеств, комплексные операторы Монжа—Ампера, многомерная неванлинновская теория. Предложенный им метод слабой сходимости в пространствах обобщенных функций открыл новый подход к теории функций вполне регулярного роста, который оказался плодотворным для изучения различных классов функций. Результаты, полученные Л.И. Ронкиным, его учениками и коллегами из разных стран, составили содержание его книги “Функции вполне регулярного роста”, изданной в 1992 г. в Голландии.

Значительный вклад был внесен Л.И. Ронкиным в теорию почти периодических функций. В этих вопросах метод слабой сходимости оказался удивительно эффективным и позволил ввести и исследовать такие общие понятия, как почти периодические потоки, дивизоры и голоморфные цепи. В опубликованной в 2001 г. статье им был введен объект, который впоследствии получил широкую мировую известность под названием “функция Ронкина” и стал базовым инструментом идемпотентного (тропического) анализа.

Часть результатов, относящихся к функциям вполне регулярного роста, интерполяции и почти периодическим функциям, были получены Л.И. Ронкиным в сотрудничестве с его учениками П.З. Агранович, А.Ю. Рашковским и А.М. Руссаковским. А.Ю. Рашковским и Л.И. Ронкиным была построена теория роста субгармонических функций конечного порядка в конусе. Кроме того, им были получены глубокие результаты о сингулярностях плюрисубгармонических функций. Связь между многочленным асимптотическим представлением субгармонической в плоскости функции и функцией распределения ее меры Рисса изучена в серии работ П.З. Агранович.

В 1984 г. были опубликованы фундаментальные работы А.Э. Еременко (совместно с М.Ю. Любичем), посвященные изучению динамики трансцендентных функций. Впервые использовав в этой области теорию аппроксимации целыми функциями, они построили ряд патологических примеров, выделили некоторые подклассы целых функций, в которых основные патологии отсутствуют, и доказали основные результаты о динамике функций из этих классов. Все эти результаты были впоследствии подытожены в работе А.Э. Еременко (совместно с М.Ю. Любичем), которая во многом определила развитие динамики целых функций в последующие годы. В 1987 г. А.Э. Еременко ввел для произвольной целой функции так называемое “убегающее множество” и доказал его основные свойства. С тех пор убегающее множество является одним из основных объектов изучения в исследовании динамики целых функций. Значительное число недавних работ посвящено исследованию “гипотезы Еременко” об убегающем множестве, которая до сих пор не доказана, несмотря на ряд глубоких результатов в этом направлении. Постепенно становится ясным, что именно это убегающее множество является главным объектом изучения в динамике трансцендентных целых функций.

В 1980—1990 гг. А.Э. Еременко и М.Л. Содин разработали новый теоретико-потенциальный метод в теории распределения значений мероморфных функций и голоморфных кривых в проективном пространстве. Впоследствии А.Э. Еременко распространил этот метод на теорию распределения значений квазирегулярных отображений римановых многообразий. Методом Еременко—Содина был получен целый ряд важных результатов: доказательство варианта 2-й основной теоремы распределения значений голоморфных кривых (окончательная форма этой теоремы неизвестна до сих пор, однако результат Еременко—Содина до сих пор не перекрыт); доказательство гипотезы Литтлвуда о средних значениях сферической производной многочлена (А.Э. Еременко, М.Л. Содин, 1986; А.Э. Еременко, 1991); доказательство гипотезы Ф. Неванлинны 1932 г. о мероморфных функциях конечного порядка с малым количеством критических точек (А.Э. Еременко, 1991); опровержение гипотезы А. Картана 1928 г. о нормальности семейств голоморфных кривых, а также доказательство модифицированной гипотезы в размерности 3 (А.Э. Еременко, 1995); доказательство наиболее общей теоремы "типа Пикара" для квазирегулярных отображений (А.Э. Еременко совместно с Дж. Льюисом, 1991).

В рамках вышеупомянутого теоретико-потенциального метода М.Л. Содин разработал версию неванлиновской теории, относящуюся к последовательностям рациональных функций, степени которых стремятся к ∞. В работах А.М. Руссаковского и М.Л. Содина и А.М. Руссаковского (совместно с Б. Шифманом) был построен многомерный аналог этой версии.

А.Е. Фрынтов получил ряд тонких результатов, основанных на применении симметризационной теоретико-потенциальной техники. Среди них — решение задачи Б.Я. Левина об экстремальных субгармонических мажорантах для относительно плотных подмножеств вещественной оси, доказательство гипотезы А. Вайцмана о поведении функции Грина при круговой симметризации плоской области, доказательство гипотезы о "длинных дугах" (совместно с Дж. Росси и А. Вайцманом). А.Е. Фрынтовым были получены важные результаты, относящиеся к поведению лакунарных рядов Тейлора и Дирихле, и дан ответ на давно поставленный вопрос о поведении минимума модуля целых функций порядка >1.

В работе Б.Я. Левина и Ю.И. Любарского были получены новые интерполяционные теоремы в пространствах целых функций экспоненциального типа. Эти исследования были затем продолжены Ю.И. Любарским и привели, среди прочего, к теоремам типа Пэли—Винера для строго выпуклых индикаторных диаграмм и разложениям в ряды экспонент в пространствах Смирнова. В дальнейшем эти методы были использованы Ю.И. Любарским в задачах теории передачи сигналов, в частности, для описания гауссовых фреймов в пространстве суммируемых с квадратом функций. Ю.И. Любарским был также исследован ряд задач о свойствах (полноте, минимальности, суммируемости) корневых систем аналитических оператор-функций и получены важные результаты, которые ранее не удавалось доказать чисто операторными методами.

П.М. Юдицкий решил ряд комплексных задач чебышевского типа для рациональных и целых функций. Среди них — комплексная версия наиболее известной задачи Чебышева о наименьшем уклонении от нуля многочлена данной степени, на интервале вещественной оси имеющего данное значение в фиксированной точке. Величина уклонения найдена в эллиптических функциях. Опубликованный в журнале "Алгебра и анализ" обзор М.Л. Содина и П.М. Юдицкого сыграл заметную роль в возрождении идей Чебышева и его последователей, в особенности Н.И. Ахиезера, связанных с привлечением геометрической теории функций. Обзор содержал ряд важных новых результатов: наиболее общую теорему о параметризации целых функций данного экспоненциального типа, наименее уклоняющихся от нуля на замкнутом подмножестве вещественной оси, и алгебраическое решение задач Е.И. Золотарева и Н.И. Ахиезера о многочленах наименьшего уклонения.

Работы Л.Б. Голинского 1990—2000-х годов внесли значительный вклад в теорию ортогональных многочленов на единичной окружности, созданную Г. Сеге в 20-х годах. Был описан класс мер на дуге окружности, параметры которых приближаются к ненулевому комплексному числу и асимптотические формулы для соответствующих ортогональных многочленов; предложен новый подход к теории, основанный на спектральной теории одного класса матричных разностных уравнений (уравнений Сеге), для которого построена теория подчиненных решений; получены точные условия отсутствия точечной компоненты меры ортогональности в терминах ее параметров; дана полная характеристика новых классов сингулярных мер на окружности и класса универсальных мер; изучены свойства нулей параортогональных полиномов (перемежаемость, оценки расстояния между ближайшими нулями, притягивающее свойство носителя меры).

Л.Б. Голинский применил теорию ортогональных многочленов на окружности для исследования гранично-начальной задачи для нелинейной системы дифференциально-разностных уравнений, известной как поток Шура, доказал разрешимость задачи Коши для произвольных допустимых начальных данных и исследовал асимптотические свойства решений при $t \to \infty$.

Связь теории ортогональных полиномов на окружности и теории аналитических функций в единичном круге (функций Шура) была обнаружена Я.Л. Геронимусом в 40-х годах. Л.Б. Голинским построена конструктивная теория функций Шура, в которой изучается связь между гладкостью граничных значений функции Шура и скоростью убывания ее параметров (прямые и обратные теоремы).

Г.Р. Белицкий внес значительный вклад в классификацию формальных и локальных отображений относительно различных групп преобразований координат. Сюда относятся задачи описания критических точек функций, исследование особенностей отображений и положений равновесия динамических систем. Формальные аспекты содержат большинство классификационных задач линейной алгебры, как например, “дикая” (по определению И.М. Гельфанда) задача подобия пар матриц. Для локальных задач требуется техника решения функциональных уравнений различного типа. Г.Р. Белицким был построен общий алгоритм приведения к нормальной форме формальных отображений относительно групп преобразований координат, естественно возникающих в упомянутых задачах. Этот алгоритм позволяет по заданному объекту (функции, отображению, динамической системе, паре матриц) продуцировать ее нормальную форму. Также была доказана локальная эквивалентность динамических систем с “малой размерностью центрального многообразия” (решение известной проблемы, поставленной В.И. Арнольдом и Ю.С. Ильяшенко).

Развитие теории J-растягивающих матриц-функций связано с именем В.П. Потапова. Совместно со своими учениками И.В. Михайловой и Л.Б. Голинским он успешно применял J-теорию к различным интерполяционным задачам (проблема Неванлинны—Пика в классах мероморфных матриц-функций в круге, проблемы моментов Гамбургера и Стилтьеса, проблема продолжения эрмитово-позитивных функций), к каноническим системам дифференциальных уравнений и к теории гильбертовых пространств функций де Бранжа.

В области функционального анализа Г.М. Фельдманом (совместно с Ю.И. Любичем и В.И. Мацаевым) в 70-е годы были изучены неквазианалитические представления T локально компактной абелевой группы G в банаховом пространстве X и доказана отделимость спектра $\sigma(T)$ таких представлений. В частности, доказано существование общего инвариантного подпространства у всех операторов представления в случае, если спектр представления содержит более чем одну точку. Г.М. Фельдман обнаружил интересную связь между спектром $\sigma(T)$ и спектром Берлинга семейства функций $\varphi(T_g x)$, $x \in X$, $\varphi \in X^*$ на группе G. Основываясь на этой связи, им была доказана полупростота банаховой алгебры, порожденной изометрическим оператором в банаховом пространстве.

В серии работ И.Е. Овчаренко (совместно с М.Г. Крейном) получил аналитическое описание совокупности sc-резольвент эрмитовых сжатий, аналитически описал совокупность πL-резольвент положительных эрмитовых операторов и решил обратные задачи для экстремальных функций положительного эрмитового оператора.

М.И. Островский в 1987 г. получил окончательное решение вопроса о возможных порядках подпространств, сопряженных к сепарабельным банаховым пространствам. Этот результат завершает многолетние исследования, в которых брали участие многие известные математики. В 1993 г. М.И. Островский получил полное описание сепарабельных банаховых пространств, сопряженные которых содержат тотальные нигде не нормирующие подпространства. До этого были известны лишь отдельные примеры пространств, для которых такие подпространства существуют. В работе 1996 г. М.И. Островским доказано, что дополняемое подпространство в декартовом произведении банаховых пространств может не быть изоморфным произведению банаховых пространств.

Используя методы функционального анализа и теории функций (распределение нулей квазиполиномов и полиномов нескольких переменных, теорема Тарского—Зайденберга и ее приложения, проблема моментов Маркова), Л.В. Фардигола получила ряд важных результатов, относящихся к математической теории управления системами с распределенными параметрами: условия стабилизируемости (в т. ч. для систем с запаздыванием) и условия управляемости в случае, когда управления ограничены заданной константой. Для произвольной эволюционной системы в частных производных построены позиционные управления с запаздыванием, стабилизирующие систему. Для волнового уравнения в бесконечных по пространственным переменным областях построены операторы, действующие в пространствах Соболева и описывающие влияние управлений на конечное состояние управляемой системы.

Прямые и обратные задачи спектрального анализа. Задачи рассеяния

С начала 50-х годов в Харькове интенсивно проводились исследования по спектральной теории операторов и теории рассеяния, которые во многом определили развитие этих областей математики в мире во второй половине 20-го века и заняли ведущее место в научной деятельности математического отделения ФТИНТа.

В 1955 году Владимир Александрович Марченко решил обратную задачу квантовой теории рассеяния. При этом были впервые получены необходимые и достаточные условия на данные рассеяния и выведено основное уравнение обратной задачи, называемое уравнением Марченко. Эти идеи впоследствии легли в основу известного метода обратной задачи теории рассеяния, используемого в теории интегрирования нелинейных эволюционных уравнений. Уравнение Марченко и до настоящего времени служит одним из основных инструментов исследования обратных задач рассеяния. Другим важнейшим исследованием, послужившим толчком к созданию спектральной теории конечнозонных и бесконечнозонных почти периодических операторов, развиваемой впоследствии во ФТИНТе, явились работы Н.И. Ахиезера (1961 г.) по полиномам, ортогональным на системе интервалов и их континуальным аналогам, где было получено решение уравнения Шредингера на гиперэллиптической римановой поверхности, называемое функцией Бейкера—Ахиезера и активно используемое в конечнозонном интегрировании. Одним из ярких достижений Н.И. Ахиезера явилось сведение им обратной задачи для конечнозонных потенциалов к проблеме обращения Якоби абелевых интегралов.

Теория рассеяния и обратные спектральные задачи. Обратные задачи спектрального анализа и, в частности, вопросы восстановления оператора по неполным спектральным данным, были одним из основных направлений деятельности отдела математической физики ФТИНТа в начале 60-х годов. В.А. Марченко изучил вопросы устойчивости решения обратных задач рассеяния на полуоси и получил точные оценки погрешности восстановления потенциала и собственных функций в зависимости от длины интервала, на котором известна функция рассеяния. Для операторов Дирака аналогичная задача была решена им вместе с Д.Ш. Лундиной, а с К.В. Масловым подобные оценки были получены для задачи восстановления оператора по спектральной функции. Результаты этих исследований представлены в монографии “Спектральная теория операторов Штурма—Лиувилля”, вышедшей в 1972 г.

После открытия физиками метода обратной задачи теории рассеяния, позволившего свести решение ряда нелинейных уравнений к решению линейных спектральных задач, В.А. Марченко внес существенный вклад в математическое обоснование этого метода и, в частности, в решение обратной задачи рассеяния для оператора Штурма—Лиувилля на всей оси, где им была дана точная характеризация независимых данных рассеяния в классе потенциалов, имеющих первый суммируемый момент. Предложенный В.А. Марченко подход послужил основой для многочисленных обобщений на различные классы потенциалов, являющихся возмущением на неубывающем фоне: типа ступеньки, периодическом, конечнозонном квазипериодическом.

Метод операторов преобразования и его многочисленные приложения к обратным задачам спектрального анализа и теории рассеяния изложены в монографии В.А. Марченко "Операторы Штурма—Лиувилля и их приложения", изданной в 1977 г.

Исследования разрешимости периодической задачи Коши для уравнения Кортевега—де Фриза (КдФ) потребовали нового подхода к решению обратной задачи спектрального анализа для уравнения Хилла, что и было сделано в совместных работах В.А. Марченко и И.В. Островского в 1975 г. В этих работах была получена эффективная параметризация спектральных данных в терминах конформного отображения верхней полуплоскости на верхнюю полуплоскость с вертикальными разрезами ("гребенку"), соответствующего квазиимпульсу уравнения Хилла. В рамках этого отображения была впервые охарактеризована геометрия спектра оператора Хилла, предложен минимальный набор независимых спектральных данных и решена обратная задача спектрального анализа.

Новая параметризация спектральных данных оператора Хилла позволила получить важный и имеющий многочисленные применения результат об аппроксимации произвольных периодических потенциалов заданной гладкости конечнозонными. В приложениях часто требуется дать явную конструкцию последовательности конечнозонных потенциалов, сходящихся к данному периодическому потенциалу, и оценить скорость сходимости. Ответы на эти вопросы в терминах высоты зубьев "гребенки" были даны в работе В.А. Марченко и И.В. Островского в 1980 г.

Дальнейшее развитие метода обратной спектральной задачи для периодического оператора Хилла позволило Л.А. Пастуру и В.А. Ткаченко построить спектральную теорию операторов Шредингера с предельно-периодическими потенциалами, допускающими сверхэкспоненциально быструю аппроксимацию периодическими функциями. Было получено полное описание независимых спектральных данных, однозначно определяющих потенциал, доказана абсолютная непрерывность спектра, квазиблоховский характер собственных функций, описана геометрия спектра в ситуации общего положения, являющегося канторовским множеством положительной меры. Эти результаты были распространены И.Е. Егоровой на случай оператора Дирака и матрицы Якоби.

В дальнейшем Л.А. Пастуром и В.А. Ткаченко была построена спектральная теория оператора Шредингера с комплексным периодическим потенциалом, отрицательные коэффициенты ряда Фурье которого равны нулю. Была дана характеризация множества независимых спектральных данных и решена обратная спектральная задача.

В начале 90-х годов В.А. Ткаченко удалось параметризовать дискриминанты Хилла несамосопряженных операторов Хилла с помощью специального класса римановых поверхностей и тем самым найти адекватную замену гребенчатой функции из теории Марченко—Островского.

В 90-е годы М.Л. Содин и П.М. Юдицкий написали цикл работ, посвященных спектральной теории матриц Якоби и операторов Шредингера, имеющих абсолютно непрерывный однородный спектр. Однородный спектр имеет достаточно сложную структуру и включает в себя все известные примеры абсолютно непрерывных, нигде не плотных спектров операторов, для которых изучались обратные задачи спектрального анализа. Коэффициенты безотражательных операторов с однородным спектром оказываются равномерно почти периодическими функциями с частотами, конструктивно определяемыми по геометрии спектра. Базируясь на известных результатах Н.И. Ахиезера и Х. Видома, авторы предложили далеко идущее обобщение классической проблемы обращения Якоби на бесконечномерных римановых поверхностях. Развитый ими подход основан на применении методов теории классов Харди в бесконечносвязных областях. Этот подход нашел дальнейшее применение в работе П.М. Юдицкого (совместно с Ф. Пехерсторфером), посвященной асимптотике ортогональных многочленов.

Работы М.Л. Содина и П.М. Юдицкого (совместно с Г. Левиным) по спектральной теории почти периодических операторов со спектрами на множествах Жюлиа привели к открытию замечательной явной формулы для детерминантов Фредгольма операторов Рюэля.

Одним из приложений периодической спектральной теории явились результаты М.В. Новицкого по описаниям спектров оператора Хилла с потенциалом, принадлежащим некоторому классу Карлемана, в котором были получены точные оценки связи между скоростью убывания длин лакун в спектре и ростом интегралов движения. Используя эти оценки, он доказал, что спектр такого оператора может быть однозначно восстановлен по полиномиальным законам сохранения для уравнения КдФ тогда и только тогда, когда этот класс квазианалитичен. М.В. Новицкий (совместно с С.А. Молчановым) доказал полноту системы спектральных инвариантов оператора Шредингера на двумерном торе, что позволило описать спектры одномерных операторов Шредингера, полученных из данных усреднением вдоль геодезических.

Методы обратной задачи рассеяния и обратной задачи по спектральной функции, созданные В.А. Марченко, находят многочисленные приложения в современных исследованиях, проводимых в математическом отделении. М.А. Кудрявцевым была решена обратная спектральная задача для пятидиагональных симметрических вещественных матриц (по спектральной матрице-функции). И.Е. Егоровой (совместно с Й. Михор и Г. Тешлом) исследована задача рассеяния для матрицы Якоби на периодическом фоне, где была дана характеризация минимального независимого множества данных рассеяния и решена обратная задача в классе возмущений, имеющих первый суммируемый момент. Также этими авторами была построена спектральная теория оператора Шредингера и матрицы Якоби типа ступеньки, коэффициенты которых имеют различные конечнозонные асимптотики на разных полуосях.

Методы решения обратных спектральных задач для матриц Якоби изложены в монографии В.А. Марченко "Введение в теорию обратных задач спектрального анализа" (2005).

Ю.И. Любарский и В.А. Марченко рассмотрели малые колебания системы попарно взаимодействующих частиц, состоящей из конечного числа каналов, однородных на бесконечности и присоединенных к рассеивателю. Были решены прямая и обратная задачи рассеяния, найдены алгоритмы нахождения характеристик каналов по данным рассеяния.

В 60-е годы Ф.С. Рофе-Бекетов нашел полное решение обратной спектральной задачи на всей оси для оператора Шредингера с произвольным вещественным потенциалом. Найденные при этом необходимые и достаточные условия на спектральную матрицу широко используются. Им (совместно с Е.Х. Христовым) исследована обратная задача рассеяния для оператора Шредингера с сильно сингулярным потенциалом, а совместно с Е.И. Зубковой (Бондаренко) — решена обратная задача рассеяния на всей оси и на полуоси для несамосопряженных систем Шредингера с треугольным матричным потенциалом.

Теория обратных задач рассеяния нашла свое развитие в направлении ее применения к задачам электромагнитного зондирования в работах Е.Я. Хруслова и Д.Г. Шепельского. Построенные Е.Я. Хрусловым операторы преобразования, линейно зависящие от спектрального параметра, позволили ему решить ряд задач об определении электромагнитных параметров среды — земной коры — по результатам измерения компонент поля на поверхности Земли. Эффективность предложенных теоретических методов была продемонстрирована путем сравнения с данными реальных геофизических экспериментов. В последующих работах Д.Г. Шепельского эти идеи развивались в направлении решения многопараметрических обратных задач теории электромагнетизма, которые интерпретировались как обратные задачи рассеяния для матричных дифференциальных уравнений с коэффициентами, зависящими сложным образом от спектрального параметра и пространственной переменной. Был предложен эффективный подход к решению таких обратных задач, основанный на переформулировке задачи рассеяния в виде задачи аналитического сопряжения типа Римана—Гильберта, который, в частности, позволяет во всей полноте изучать вопрос единственности определения материальных параметров среды по результатам измерений, выполненных вне интересующей пространственной области.

Спектральная теория дифференциальных и разностных операторов. В 1963 г. появилась книга И.М. Глазмана "Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов”. Она посвящена исследованию спектра таких операторов в зависимости от поведения коэффициентов дифференциальной операции, вида области, характера краевых условий, минуя разложения по собственным функциям и анализ спектральной меры. Основу прямых методов составляют предложенный И.М. Глазманом метод расщепления и метод сравнения квадратичных форм. Их применение было проиллюстрировано рядом примеров на определение энергетического спектра конкретных квантово-механических систем. Метод расщепления был распространен и на операторы в частных производных.

В 60-е годы Ф.С. Рофе-Бекетов изучил топологию спектра дифференциального оператора с комплексными периодическими коэффициентами и нашел условия конечности числа дискретных уровней, вносимых в лакуны непрерывного спектра возмущением вещественного периодического потенциала. Позднее его ученик В.И. Храбустовский обобщил эти результаты на периодические самосопряженные системы произвольного порядка, а также построил спектральную матрицу периодической системы с вырождающимся матричным весом на оси.

В работах И.Е. Егоровой и Л.Б. Голинского был изучен дискретный спектр комплексных полубесконечных матриц Якоби с быстроубывающими элементами. Найдена точная (в смысле порядка) скорость стремления, при которой дискретный спектр оператора конечен, описаны области, содержащие весь дискретный спектр, и найдены условия отсутствия такого спектра. Эти результаты распространены на случай ленточных матриц (имеющих конечное число ненулевых диагоналей) в работе Л.Б. Голинского и М.А. Кудрявцева, в которой они применяются для исследования дискретного спектра комплексных бесконечных в обе стороны асимптотически периодических якобиевых матриц.

Ф.С. Рофе-Бекетов впервые ввел в теорию расширений метод бинарных отношений и получил с его помощью описание всех самосопряженных расширений дифференциальных операторов произвольного порядка с ограниченными операторнозначными коэффициентами на конечном интервале. Он (совместно с А.М. Холькиным) построил осцилляционную теорию для таких операторов на конечном и бесконечном интервалах. Итогом этих исследований явилась их монография “Спектральный анализ дифференциальных операторов. Связь спектральных и осцилляционных свойств” (2001), существенно дополненный вариант которой был издан на английском языке (2005).

В начале 70-х годов Ф.С. Рофе-Бекетов (совместно с В.И. Коганом) получил важные результаты о возможных значениях индексов дефекта дифференциальных операторов с комплекснозначными коэффициентами. Он также получил условия существенной самосопряженности сильно эллиптических операторов (совместно с А.Г. Брусенцевым) и неполуограниченных операторов Шредингера с локально интегрируемым потенциалом (совместно с Х. Кальфом).

Математические проблемы статистической физики и теории случайных матриц и операторов

Спектральная теория случайных дифференциальных и конечно-разностных операторов. Начало работам по спектральной теории случайных и почти периодических операторов было положено работами Л.А. Пастура второй половины 60-х годов, мотивированными бурным развитием физики конденсированных неупорядоченных систем, в частности, работами выдающегося физика-теоретика И.М. Лифшица. В 1967 г. Л.А. Пастуром (совместно с М.М. Бендерским) был построен первый пример одномерного уравнения Шредингера со случайным ограниченным потенциалом, для которого точно вычисляется ряд важных спектральных характеристик, в том числе асимптотика плотности состояний на краю спектра. Затем в серии работ Л.А. Пастура с соавторами были заложены основы спектральной теории эргодических операторов и изучены два важных класса таких операторов — случайные и почти периодические. В частности, получены классические результаты о самосопряженности и индексах дефекта, плотности состояний и геометрии спектра, показателях Ляпунова одномерных операторов и их связи с абсолютно-непрерывным спектром. Одним из наиболее ярких результатов в этом направлении является доказательство наличия чисто точечного спектра у оператора Шредингера со случайными коэффициентами, опубликованное в работе Л.А. Пастура (совместно с И.Я. Гольдшейтом и С.А. Молчановым, 1977). Результаты этих исследований изложены в широко известной монографии Л.А. Пастура и А.Л. Фиготина “Spectra of Random and Almost Periodic Operators”. Они привели к возникновению важного направления современной спектральной теории и математической физики, активно развивающейся в настоящее время.

Математические проблемы статистической физики. Параллельно с математическими исследованиями неупорядоченных систем велись активные исследования по теоретической физике неупорядоченных конденсированных сред, в частности, по природе дефектов и структуре спектра элементарных возбуждений. В работах А.М. Косевича и Л.А. Пастура была построена дислокационная теория двойников и трещин в твердых телах, а также решен ряд важных задач общей теории дислокаций и теории прочности твердых тел. Затем, под влиянием И.М. Лифшица, Л.А. Пастур и С.А. Гредескул начали заниматься изучением спектра элементарных возбуждений в неупорядоченных системах. Результаты их совместных с И.М. Лифшицем работ в этой области во многом определили современный облик этого раздела теоретической физики (методы вычисления кинетических характеристик, исследования флуктуационного и примесного спектра и т. д.). Основные результаты этих исследований были подытожены в монографии И.М. Лифшица, С.А. Гредескула и Л.А. Пастура “Введение в теорию неупорядоченных систем”.

Одним из важных направлений работы, связанной с математическими проблемами теоретической физики, являются исследования по теории фазовых переходов в разнообразных моделях статистической механики. К этому направлению относится работа Л.А. Пастура (1974 г.) по теории уравнений Кирквуда—Зальцбурга, в которой исследуется спектр бесконечномерного интегрального оператора, порождаемого этими уравнениями, и устанавливается связь с нулями большой статистической суммы. В середине 80-х годов в цикле работ Фрелиха, Саймона и Спенсера был предложен так называемый метод инфракрасных оценок, позволивший математически корректно доказать наличие фазового перехода в трехмерных спиновых магнитных системах. Дальнейшее развитие этого метода, а также его сочетание с методами фейнмановского интегрирования, позволило Л.А. Пастуру и Б.А. Хоруженко (1987) исследовать фазовые переходы в модели квантовых ротаторов, что оказало существенное влияние на дальнейшее развитие математической физики фазовых переходов.

Важным направлением в изучении критического поведения как дискретных, так и непрерывных моделей статистической физики всегда были методы теории среднего поля Кюри—Вейсса. Применение и развитие этого метода для квантовых систем в работах Н.Н. Боголюбова (мл.) в 60—70-е годы позволило понять многие важные закономерности их критического поведения. В то же время в работах Лебовица и Пенроуза было показано, что модель среднего поля возникает в пределе, когда радиус взаимодействия стремится к бесконечности. Идея применения метода Н.Н. Боголюбова (мл.) к предельному переходу бесконечного радиуса взаимодействия была предложена в работе Л.А. Пастура и М.В. Щербины (1984). Эта идея позволила развить методы изучения корреляционных функций в разнообразных асимптотических режимах. Позже эти методы были успешно использованы при изучении не только различных систем статистической механики, но и теории случайных матриц.

Одним из интересных направлений в статистической физике 70-х годов было исследование фазовых переходов в сферической модели, предложенной М. Кацем. Эта модель, в отличие от традиционной модели среднего поля Кюри—Вейсса, позволяет почувствовать влияние размерности пространства на фазовые переходы и тем самым дает довольно реалистичную картину критического поведения магнетиков. Исследование сферических моделей неупорядоченных спиновых систем было начато Л.А. Пастуром и продолжено затем М.В. Щербиной и Б.А. Хоруженко. Эти исследования показали, что сферическая модель может быть получена из классической модели Гейзенберга предельным переходом в случае, когда размерность спинового пространства стремится к бесконечности. Разработанный метод позволяет доказывать сходимость не только свободной энергии, но и корреляционных функций соответствующих моделей.

Большое значение для развития теории неупорядоченных систем имел цикл работ по теории спиновых систем со случайным взаимодействием, начатый работами Л.А. Пастура (совместно с А.Л. Фиготиным) и продолженный потом работами Л.А. Пастура с М.В. Щербиной и Л.А. Пастура с Б.А. Хоруженко. Эти работы носили пионерский характер и позволили понять многие важные особенности поведения спиновых стекол. В них впервые была доказана самоусредняемость свободной энергии моделей среднего поля теории спинового стекла, в частности, базовых моделей Шеррингтона—Киркпатрика и Хопфилда, а также впервые показано, что параметр порядка в этих моделях при температуре ниже критической не является самоусредняющейся величиной. Кроме того, в этих работах впервые был предложен метод изучения корреляционных функций, основанный на введении в модель источников с гауссовскими параметрами. Этот метод вызвал резкий всплеск интереса математиков к моделям среднего поля теории спинового стекла и инициировал интенсивные математические исследования в этой области, продолжающиеся в настоящее время.

Теория случайных матриц. В середине 60-х годов, под влиянием В.А. Марченко, Л.А. Пастур начал заниматься исследованием спектральных свойств случайных матриц больших размерностей. В их совместной работе 1967 г. не только был получен ставший теперь классическим результат о распределении собственных значений ансамбля Уишарта, но и предложен метод, позволивший найти асимптотическое распределение собственных значений для целого класса ансамблей случайных матриц. Эта работа послужила началом целого цикла исследований сотрудников математического отделения института в теории случайных матриц, которые активно продолжаются и сейчас. Среди полученных результатов можно выделить результаты Л.А. Пастура о деформированном ансамбле Вигнера и доказательстве сходимости интегрированной плотности состояний ансамбля Вигнера к полукруговому закону при минимальных условиях типа Линдеберга. Большое значение для дальнейших исследований имел также метод, развитый Л.А. Пастуром и А.М. Хорунжим, основанный на идее написания уравнений типа Кирквуда—Зальцбурга для моментов резольвент случайных матриц с последующим доказательством факторизации их решений. Этот метод впоследствии был успешно развит и неоднократно применен А.М. Хорунжим для изучения различных моделей случайных матриц, в частности полосковых матриц с растущей шириной полосы. Особый интерес для исследования флуктуаций линейных статистик имел результат Л.А. Пастура, Б.А. Хоруженко и А.М. Хорунжего о дисперсии преобразования Стильтьеса модели Вигнера с негауссовским взаимодействием. Метод, предложенный в их совместной работе, лег в основу доказательства центральной предельной теоремы для флуктуаций линейных статистик во многих моделях случайных матриц. Это направление сейчас активно развивается в теории случайных матриц, в частности в работах Л.А. Пастура с А.Н. Лытовой и В.Ю. Васильчуком.

Еще одним важным направлением в теории случайных матриц является исследование моделей типа модели Вайкулеску. В таких ансамблях случайность возникает как следствие интегрирования по мере Хаара на группе унитарных матриц. Распределение собственных значений таких матриц играет важную роль в современной теории "свободной вероятности", а потому представляет особый интерес. Это направление представлено работами Л.А. Пастура и В.Ю. Васильчука.

Относительно новым направлением в теории случайных матриц является теория так называемых разреженных матриц, связанных со случайными графами больших размерностей. Такие графы часто возникают при моделировании сложных больших систем в биологии, социологии, Интернете и т. п. По сравнению с моделями типа Вигнера, разреженные матрицы демонстрируют качественно другое поведение собственных значений и собственных функций. Так, при определенных значениях параметров спектр таких матриц является всюду плотным, чисто точечным, а все собственные векторы локализованы. Исследования таких матриц в математическом отделении представлены в работах В.В. Венгеровского, А.М. Хорунжего и М.В. Щербины.

В начале 90-х годов Л.А. Пастур одним из первых понял перспективность нового раздела теории случайных матриц — так называемых матричных моделей. Его работы с М.В. Щербиной о глобальном распределении собственных значений этих моделей и универсальности локального распределения собственных значений стали пионерскими в этой области. Они дали толчок бурному развитию математической теории унитарно-инвариантных матричных моделей, которое продолжается последнее десятилетие. В этой области Л.А. Пастуром и М.В. Щербиной получены важные результаты об универсальности локального распределения собственных значений вблизи границы спектра, об асимптотике поведения коэффициентов матрицы Якоби, связанной с соответствующими ортогональными полиномами, об универсальности локального распределения вблизи нулей плотности состояний и др. В последние годы особый интерес вызывает исследование ортогонально-инвариантных матричных моделей, в частности доказательство универсальности локального распределения собственных значений соответствующих матриц. Это направление в математическом отделении представлено работами М.В. Щербины.

Нелинейные эволюционные уравнения: метод обратной задачи рассеяния

Теория солитонов. Развитие теории прямых и обратных задач рассеяния привело в начале 70-х годов 20-го века к созданию нового направления в теории нелинейных уравнений — теории солитонов, или теории вполне интегрируемых уравнений.

Начало этому направлению положила работа Гарднера, Грина, Крускала и Миуры (1967), в которой была предложена замена переменных в нелинейном уравнении Кортевега—де Фриза (КдФ), основанная на формализме прямой и обратной задачи рассеяния для одномерного уравнения Шредингера, позволившая линеаризовать уравнение КдФ. Впоследствии работы Лакса, Захарова и Шабата показали, что такая линеаризация не является специфической для уравнения КдФ, а может успешно применяться и к другим, важным с точки зрения приложений, нелинейным уравнениям (нелинейное уравнение Шредингера, уравнение синус-Гордона, магнетик Гейзенберга и др.), обладающим представлением в виде пары линейных уравнений — пары Лакса. Этот подход получил название метода обратной задачи теории рассеяния. Новый метод оказался тесно связанным не только с теорией рассеяния и спектральной теорией операторов, но и с другими областями математики, такими, как теория аналитических и мероморфных функций, алгебраическая геометрия и абелевы функции, алгебры Ли и симплектическая геометрия.

Методы интегрирования нелинейных уравнений, основанные на методе обратной задачи рассеяния, начали развиваться во ФТИНТе в середине 70-х годов, когда был поставлен вопрос о решении периодической задачи для таких уравнений. Были предложены различные подходы к ее решению (Новиков, Дубровин, Лакс, Маккинм и др.) и построены явные формулы (Матвеев, Итс) для решений уравнения КдФ в терминах тета-функций. Эти решения, соответствующие самосопряженным L-операторам Лакса с абсолютно непрерывным спектром, состоящим из конечного числа замкнутых интервалов (зон), получили название конечнозонных. В.А. Марченко дал алгоритм решения периодической задачи для уравнения Кортевега—де Фриза с помощью предложенного им метода полиномиальных аппроксимаций с последующим предельным переходом.

Метод полиномиальных аппроксимаций В.А. Марченко нашел свое применение в работах В.А. Козела и В.П. Котлярова. Они показали, что нелинейное уравнение Шредингера и уравнение синус-Гордона, для которых L-операторы Лакса являются несамосопряженными, допускают конечномерные редукции к совместным автономным системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Для автономных систем уравнений был найден полиномиальный, по спектральному параметру, закон сохранения, что позволило доказать глобальную разрешимость этих систем уравнений и указать необходимые и достаточные условия регулярности и вещественности (в случае уравнения синус-Гордона) их решений. Совместные автономные системы уравнений были проинтегрированы с привлечением римановых поверхностей, тета-функций и проблемы обращения Якоби для гиперэллиптических интегралов. Были построены явные формулы для конечнозонных решений нелинейного уравнения Шредингера (В.П. Котляров), уравнения синус-Гордона (В.А. Козел, В.П. Котляров), уравнения изотропного магнетика Гейзенберга (В.П. Котляров). Результаты В.А. Марченко по периодической задаче для уравнения Кортевега — де Фриза были распространены И.Е. Егоровой на случай предельно-периодических начальных данных, имеющих канторовский спектр положительной меры, и было показано, что решение является равномерно почти периодической функцией по времени.

Для теории солитонов характерно многообразие применяемых подходов и методов. В.А. Марченко предложил метод решения нелинейных уравнений, основанный на замене данного уравнения на уравнение того же вида относительно функций, принимающих значения в произвольной операторной алгебре. Решения исходного уравнения получаются из односолитонных операторных решений окаймлением их специальными конечномерными проекторами. Произвол в выборе операторной алгебры и окаймляющих проекторов позволяет находить широкие классы решений Кортевега—де Фриза, Кадомцева—Петвиашвили, цепочек Тода и Ленгмюра и других интегрируемых уравнений. Соответствующие результаты составляют содержание монографии В.А. Марченко "Нелинейные уравнения и операторные алгебры" (1986). Дальнейшее развитие этих идей привело к созданию в 90-е годы теории неубывающих решений вполне интегрируемых уравнений.

Асимптотика решений нелинейных эволюционных уравнений при больших временах. Важной особенностью метода обратной задачи рассеяния в теории нелинейных эволюционных уравнений является его эффективность при исследовании поведения решений таких уравнений при больших временах. Первый замечательный асимптотический результат был получен для уравнения КдФ в 1973 г. (Шабат), где было показано, что быстро убывающее (локализованное) начальное условие под действием потока КдФ распадается с ростом времени на конечное число уединенных волн — солитонов. С точки зрения метода обратной задачи, эти солитоны порождаются дискретным спектром L-оператора Лакса. Используя метод Уизема, в 1973 г. Гуревич и Питаевский построили приближенное решение задачи об эволюции начального разрыва типа ступеньки под действием потока КдФ и предсказали рождение солитонов на фронте волны, количество которых неограниченно возрастает с ростом времени. Однако это противоречило факту отсутствия дискретного спектра у одномерного оператора Шредингера (L-оператора Лакса) с таким потенциалом. Это кажущееся противоречие было разрешено в работе Е.Я. Хруслова (1974) о распаде начального условия типа ступеньки в уравнении Кортевега—де Фриза. Было показано, что решение распадается не на обычные солитоны, а на локализованные волны, которые порождаются непрерывным однократным спектром, обусловленным неубывающим характером начального условия. Характерной особенностью этих волн является тот факт, что с ростом времени они расходятся существенно медленнее, чем обычные солитоны. Впоследствии такие волны стали называть асимптотическими солитонами.

Детальный асимптотический (по времени) анализ нелокализованных решений одномерных (по пространству) нелинейных эволюционных уравнений, обладающих парой Лакса, был проведен в работах В.П. Котлярова и Е.Я. Хруслова. Были найдены условия на однократный непрерывный спектр L-оператора, приводящий к распаду решений на асимптотические солитоны, и получены явные асимптотические формулы. Было также установлено, что типичными начальными условиями, приводящими к распаду решений на асимптотические солитоны, являются данные типа ступеньки с конечнозонным характером поведения на одной из бесконечностей. Аналогичные вопросы для цепочки Тоды изучены И.Е. Егоровой и Е.Я. Хрусловым (совместно с А. Буте де Монвель).

В 90-е годы в работах И.А. Андерса, В.П. Котлярова и Е.Я. Хруслова был проведен асимптотический анализ нелокализованных решений двумерных (по пространству) уравнений типа Кадомцева—Петвиашвили и доказано, что такие решения распадаются на асимптотические солитоны. Были открыты новые типы асимптотических солитонов — криволинейные асимптотические солитоны, образующие цуги искривленных уединенных волн на фронте решений. Были изучены распады решений как в окрестности переднего, так и заднего фронтов.

Метод обратной задачи рассеяния для начально-краевых задач. К середине 90-х годов относится активизация исследований в направлении адаптации метода обратной задачи рассеяния, к анализу начально-краевых задач для нелинейных эволюционных уравнений. Оказалось, что наиболее удобной формой метода обратной задачи рассеяния для изучения асимптотического поведения решений является формулировка обратной задачи рассеяния в виде задачи Римана—Гильберта, т. е. задачи об аналитической факторизации в комплексной плоскости спектрального параметра матричнозначной функции, заданной на контуре в этой плоскости. Был разработан нелинейный аналог метода наискорейшего спуска для матричных задач Римана—Гильберта с быстро осциллирующими матрицами сопряжения (скачка), первоначально предложенный Дейфтом и Чжоу для анализа начальных задач. Работы в этом направлении во ФТИНТе ведутся В.П. Котляровым и Д.Г. Шепельским. В работах Д.Г. Шепельского (совместно с А. Буте де Монвель и А. Фокасом) было показано, что метод задачи Римана—Гильберта для начально-краевых задач столь же эффективен в применении к исследованию асимптотик, как и в случае начальных задач. Был предложен вариант метода задачи Римана—Гильберта для анализа решений краевых задач для модифицированного уравнения Кортевега—де Фриза (МКдФ) на полуоси (по пространственной переменной) в случае убывающих (с ростом времени) граничных условий. Впоследствии этот метод был применен для анализа начально-краевой задачи для уравнения МКдФ на конечном интервале, а также для начально-краевых задач для других интегрируемых нелинейных уравнений.

В работах В.П. Котлярова с соавторами дано обобщение метода обратной задачи рассеяния для начально-краевых задач с периодическими по времени граничными условиями и развит метод асимптотического анализа таких задач. В результате был описан процесс генерации асимптотических солитонов в начально-краевых задачах для нелинейного уравнения Шредингера (совместно с А. Буте де Монвель) и для интегрируемой модели стимулированного рамановского рассеяния — в работе с Е.Я. Хрусловым. В.П. Котляровым (совместно с А. Итсом и А. Буте де Монвель) дано обобщение метода наискорейшего спуска для задач Римана—Гильберта и на этой основе получено полное описание асимптотического поведения решения при больших временах нелинейного уравнения Шредингера в случае одночастотных граничных условий и убывающих начальных данных.

Вопросы квантовой теории и теории представлений

Квантовая теория поля. Существенные результаты по квантовой теории поля были получены В.А. Щербиной в отделе математической физики. На базе R-операции был построен ренормированный ряд теории возмущений по константе взаимодействия для S-матрицы скалярного поля с φ^4-взаимодействием, квантовой электродинамики и других ренормируемых теорий. Для ренормированных фейнмановских амплитуд построены представления в виде сходящихся параметрических интегралов. Получено полное решение задачи о построении S-матрицы в классе формальных степенных рядов.

Представления бесконечномерных групп Ли. Первые содержательные результаты по теории представлений бесконечномерных групп Ли были получены в известной книге Фридрихса “Математические вопросы квантовой теории поля” (1953), повлекшей за собой целый ряд работ по представлениям алгебр канонических коммутационных и антикоммутационных соотношений. Их представления, начиная с середины 60-х годов прошлого века, систематически изучались во ФТИНТе в работах В.Я. Голодца. Он впервые построил представления не типа I (фактор представления типов II и III по классификации фон Неймана).

В 70-х годах прошлого века было положено начало классификационной теории для представлений бесконечномерных групп (Э. Том, А. Либерман, А.А. Кириллов, Д. Войкулеску, Г.И. Ольшанский). В середине 80-х годов во ФТИНТе Н.И. Нессоновым была получена полная классификация допустимых представлений бесконечномерных аналогов классических матричных групп из списка Ольшанского.

С целью построения обобщения теории характеров Тома—Войкулеску на бесконечномерных группах некомпактного типа Н.И. Нессоновым была развита теория допустимых представлений групп матриц с элементами из алгебры с единицей. При этом были обнаружены важные свойства, не имеющие классических аналогов, которые позволили получить полное описание допустимых представлений групп токов, связанных с общей линейной группой.

В последнее время возрос интерес к теории представлений бесконечной группы подстановок $S(\infty)$ и некоторых ее обобщений. Это связано с открытием новых связей со смежными областями, с появлением новых примеров представлений и естественно возникшими задачами классификации. Ряд результатов по полной классификации п. о. ф. на $S(\infty)$, удовлетворяющих условию центральности по отношению к подгруппе $S(n, \infty)$, оставляющей неподвижными n элементов, получен в исследованиях А.В. Дудко, Н.И. Нессонова (совместно с А.М. Вершиком). Теоремы типа Э. Тома были доказаны А.В. Дудко, Н.И. Нессоновым для полупрямых произведений $S(\infty)$ и продакт-групп.

Квантовые группы. Основы теории квантовых групп были заложены В.Г. Дринфельдом (совместно с М. Джимбо). Одной из задач теории было решение известного в физике нелинейного алгебраического уравнения Янга—Бакстера, что было сделано в работах В.Г. Дринфельда. В 1990 году за цикл работ по теории квантовых групп, а также за доказательство гипотезы Ленглендса для $GL(2)$ над глобальным полем конечной характеристики В.Г. Дринфельду была присуждена Филдсовская премия.

В дальнейшем исследования в области квантовых групп в математическом отделении ФТИНТа проводились по следующим основным направлениям: теория функций на квантовых ограниченных симметрических областях; квантовые модули Хариш—Чандры и ассоциированные функторы; дифференциальные исчисления на квантовых предоднородных векторных пространствах; q-дифференциальные операторы и их спектральный анализ.

В 1997 г. Л.Л. Ваксманом и С.Д. Синельщиковым был введен в рассмотрение новый класс однородных пространств некомпактных квантовых групп — квантовые аналоги неприводимых ограниченных симметрических областей. Ограниченные симметрические области привлекают неизменное внимание специалистов по геометрии, алгебре и анализу как источник точно решаемых задач комплексного анализа, гармонического анализа и классической математической физики.

Простейшей ограниченной симметрической областью является единичный круг, квантовый аналог которого был введен Климыком и Лесневским. Во ФТИНТе Л.Л. Ваксман, Д.Л. Шкляров и С.Д. Синельщиков построили квантовые аналоги алгебр функций на единичном круге. В работах этих авторов сформулированы квантовые аналоги некоторых “типичных” задач теории функций в единичном круге; эти задачи решены в квантовом случае с применением методов, адекватных при исследовании квантовых симметрических ограниченных областей. Построен q-аналог метода квантования Березина и получена явная формула для деформации квантового круга.

Классификация неприводимых ограниченных симметрических областей, рассматриваемых с точностью до изоморфизма, получена Картаном в середине 30-х годов. В работах Л.Л. Ваксмана, Д.Л. Шклярова, С.Д. Синельщикова изучены некоммутативные аналоги алгебр функций в стандартно реализованных неприводимых ограниченных симметрических областях. При этом решены задачи описания всех точных неприводимых представлений рассматриваемых алгебр, построения ковариантных дифференциальных исчислений над этими алгебрами.

Одной из содержательных задач теории представлений является задача построения и классификации унитаризуемых представлений вещественных редуктивных групп. Общий метод построения таких представлений базируется на методе когомологической индукции и так называемом функторе Бернштейна. Важным элементом связанных с этим конструкций являются алгебры распределений на группе Ли G с носителем на максимальной компактной подгруппе K. Усилиями Л.Л. Ваксмана, С.Д. Синельщикова и А.А. Столина решена задача построения квантового аналога таких алгебр. Тем самым преодолена главная трудность на пути построения квантового аналога функтора Бернштейна и сделан важный шаг на пути к построению квантового аналога метода когомологической индукции, общая схема которого также описана в работе указанных авторов.

При решении задачи поиска явного вида общих собственных функций и совместного спектра инвариантных разностных операторов О.А. Берштейном, Л.Л. Ваксманом и Е.К. Колесником был получен квантовый аналог теорем Сахи и Уоллака—Окунькова об общих собственных функциях инвариантных дифференциальных операторов.

Теория динамических систем

Теория динамических систем изучает группы преобразований, действующие на различных фазовых пространствах. Изучение теории динамических систем во ФТИНТе началось еще в 60-е годы прошлого столетия и является одним из наиболее активно развивающихся направлений в математическом отделении института.

Эргодическая теория. Объектами изучения в эргодической теории являются автоморфизмы или группы автоморфизмов пространств с мерой. Классическая эргодическая теория исследует свойства сохраняющих меру автоморфизмов стандартных пространств с мерой. В.Я. Голодец начал в конце 60-х годов во ФТИНТе систематическое изучение несингулярных автоморфизмов пространств с мерой. Предложенный им подход базировался на существенном прогрессе, который был достигнут в работах о классификации алгебр фон Неймана типа III. В.Я. Голодец был одним из первых математиков, кто осознал и успешно использовал то обстоятельство, что теория алгебр фон Неймана имеет много общего с теорией динамических систем на измеримых пространствах.

С середины 70-х годов прошлого столетия В.Я. Голодец привлек к совместной работе своих учеников С.И. Безуглого и Н.И. Нессонова, а несколько лет спустя к ним присоединились С.Д. Синельщиков, С.Л. Гефтер, А.И. Даниленко и В.М. Кулагин. Этой группой был получен ряд важных результатов, которые оказали большое влияние на развитие эргодической теории. Ряд работ, выполненных В.Я. Голодцом вместе с С.И. Безуглым и С.Д. Синельщиковым, посвящен полному решению проблемы внешнего сопряжения для действий счетных и локально компактных групп автоморфизмов, лежащих в нормализаторе гиперфинитных отношений эквивалентности. Было показано, какую важную роль играют коциклы динамических систем со значениями в аменабельных группах. С середины 80-х годов основные усилия В.Я. Голодца, С.И. Безуглого и С.Д. Синельщикова были сосредоточены на подробном изучении структуры таких коциклов. Было введено понятие слабой эквивалентности коциклов и полностью решена проблема классификации коциклов гиперфинитных групп относительно слабой эквивалентности. Были доказаны теоремы существования и единственности коциклов с плотными образами в аменабельных группах. Эти работы позволили построить теорию слабой эквивалентности гиперфинитных групп автоморфизмов пространств с мерой, которая является расширением теории орбитальной эквивалентности групп автоморфизмов. Впервые был построен континуум сохраняющих меру орбитально неэквивалентных действий некоторой счетной неаменабельной группы. Позже В.Я. Голодец и С.Л. Гефтер получили аналогичный результат для действий любой решетки со свойством (*T*) и показали, что эргодические действия таких решеток имеют тривиальную фундаментальную группу. Были описаны свойства стабилизаторов несвободных действий локально компактных групп и решена важная проблема построения небернуллиевских действий групп с вполне положительной энтропией.

Одним из наиболее известных и эффективных методов построения сохраняющих меру действий в эргодической теории является метод разрезания и стыковки. Существенное развитие этого метода получено в недавних работах А.И. Даниленко, где он решил задачу Тувено—Леманчика—дель Хунко о построении квазипростого автоморфизма пространства с вероятностной мерой, дизъюнкного со всеми простыми. А.И. Даниленко также получил явное решение проблемы Рохлина о существовании слабо перемешивающих автоморфизмов с однородным спектром любой кратности и (в соавторстве с Рудольфом) построил автоморфизм пространства с бесконечной мерой нулевой энтропии Кренгеля, декартово произведение которого с автоморфизмом вероятностного пространства нулевой энтропии имеет бесконечную энтропию. Тем самым была решена проблема Кренгеля об энтропии произведений.

Некоммутативная, борелевская и канторовская динамики. В последние годы отчетливо проявилась тенденция, состоящая в применении идей и методов, развитых в эргодической теории, для исследования групп преобразований различных фазовых пространств. Одно из таких применений выражается в построении теории квантовой динамической энтропии для автоморфизмов операторных алгебр. Эта теория является важной составляющей некоммутативной динамики, которая изучает автоморфизмы некоммутативных фазовых пространств, например операторных алгебр. В.Я. Голодец написал большой цикл работ по квантовой энтропии. В частности, им вместе с С.И. Безуглым и С.В. Нешвеевым была вычислена энтропия для групп боголюбовских автоморфизмов CAR-алгебры, бинарных сдвигов Пауэрса, автоморфизмов некоторых скрещенных произведений. В.Я. Голодец и С.В. Нешвеев изучили квантовые динамические системы, обладающие аналогом свойства Колмогорова. Исследования квантовой энтропии были затем продолжены в работах Н.И. Нессонова и М.С. Бойко.

Начиная с 2000 г., в математическом отделении ФТИНТа начали активно развиваться новые направления в теории динамических систем: борелевская и канторовская динамики. Борелевская динамика изучает группы автоморфизмов и отношения эквивалентности на стандартных борелевских пространствах. Канторовская динамика исследует группы гомеоморфизмов канторовских множеств. При сравнении многих классификационных результатов в эргодической теории и в борелевской и канторовской динамиках можно сделать важное наблюдение: эти результаты имеют близкие формулировки, хотя относятся к разным объектам. Отчетливо такое явление проявляется при сравнении результатов по орбитальной эквивалентности преобразований, действующих на измеримых, борелевских и канторовских пространствах. Эти наблюдения послужили отправной точкой для исследований, проведенных в цикле работ С.И. Безуглого и К.С. Мединца по борелевской и канторовской динамикам. Были применены новые топологические методы для изучения свойств групп преобразований стандартного борелевского пространства и канторовского множества, что позволило изучить свойства важных классов преобразований (например, одометров, минимальных, периодических и апериодических), а также свойства различных подгрупп. Тем самым была построена теория аппроксимации апериодических автоморфизмов посредством периодических и гладких преобразований в борелевской и канторовской динамиках; найдены и явно описаны замыкания различных групп и классов преобразований, определяемых тем или иным динамическим свойством.

При изучении эргодических автоморфизмов было замечено, что они могут быть реализованы как “адические” преобразования, действующие на пространстве бесконечных путей некоторой диаграммы Браттели. С.И. Безуглый и К.С. Мединец распространили этот подход на апериодические преобразования борелевских и канторовских пространств и доказали возможность реализации таких преобразований на пространствах путей соответствующих диаграмм Браттели.

Динамические системы, порождаемые дифференциальными уравнениями. Ряд интересных и важных результатов по качественной теории автономных динамических систем и дифференциальных уравнений неклассического типа (с точками преломления, толчками, отклоняющимся аргументом) был получен в работах А.Д. Мышкиса и Г.В. Щербины. В 1972 г. вышла монография А.Д. Мышкиса “Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом”.

Теория усреднения

В различных разделах физики и механики возникает необходимость построения макроскопических моделей физических процессов, протекающих в микронеоднородных средах. Такие процессы описываются дифференциальными уравнениями в частных производных с быстро осциллирующими коэффициентами и краевыми задачами в сильно перфорированных областях. Непосредственное решение таких задач практически невозможно ни аналитическими, ни численными методами. В связи с этим естественно возникает проблема усредненного описания таких процессов — построения их макроскопических моделей.

Несмотря на то, что физики и механики изучают эту проблему еще со времен Максвелла и Рэлея, она долгое время оставалась вне поля зрения математиков. Только с середины 60-х годов XX века начала интенсивно развиваться математическая теория усреднения дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами и краевых задач в сильно перфорированных областях. Это во многом было стимулировано задачами современной техники и, в первую очередь, проблемой создания композитных материалов с заданными свойствами.

Математическое описание физических процессов в микронеоднородных средах предполагает, что локальные характеристики таких сред зависят от малого параметра $\varepsilon > 0$, который является характерным масштабом микроструктуры, и проводится асимптотический анализ задачи при $\varepsilon \to 0$. При этом оказывается, что главные члены асимптотики решений исследуемой задачи описываются новыми дифференциальными уравнениями, рассматриваемыми в простых областях и имеющими плавно меняющиеся коэффициенты. Эти уравнения и являются усредненными (макроскопическими) моделями физических процессов в микронеоднородных средах, а их коэффициенты — эффективными характеристиками таких сред.

В простейших ситуациях (например, в случае периодической микроструктуры, зависящей от одного малого параметра) усредненные уравнения имеют такой же вид, что и исходные уравнения. Но чаще приходится иметь дело с более сложными средами, микроструктура которых характеризуется несколькими параметрами разных порядков малости. Такие структуры встречаются как в природе (трещиновато-пористые среды нефтяных и газовых месторождений), так могут иметь и искусственное происхождение (армированные материалы, композитные сверхпроводники и т. д.). Усредненные модели в таких случаях существенно отличаются от исходных (микроскопических) моделей: они становятся или нелокальными, или многокомпонентными, или моделями с памятью. Исследования в этом направлении, проводящиеся во ФТИНТе, связаны с изучением именно таких нестандартных усредненных моделей, которые строятся для краевых задач в сильно перфорированных областях, для дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими (сильно контрастными) коэффициентами, для задач гидродинамики суспензий и других сложных веществ с микроструктурой.

Усреднение краевых задач в перфорированных областях. В 1962 г. В.А. Марченко (совместно с З.С. Аграновичем и В.П. Шестопаловым) разработал метод решения задач дифракции волн на периодических решетках, основанный на задаче Римана—Гильберта. С помощью этого метода были получены асимптотические формулы для решения в случае малых частот колебаний, узких полос или узких щелей. Анализ таких длинноволновых асимптотик привел В.А. Марченко к постановке нового класса задач — краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных в областях с мелкозернистой границей, которые стали прототипом задач усреднения в сильно перфорированных областях.

Первый результат в этом направлении был получен в работе В.А. Марченко и Е.Я. Хруслова (1964), в которой исследовалось асимптотическое поведение задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в области, заполненной большим числом зерен. Было показано, что первый член асимптотики описывается уравнением Шредингера с эффективным потенциалом. Позднее Е.Я. Хрусловым задача Дирихле была исследована для произвольных эллиптических уравнений в областях произвольной формы, в частности, областях, дополнительных к связным множествам типа тонких сеток. Для характеризации таких областей им было введено понятие так называемых "мезоскопических" характеристик, в терминах которых формулировались необходимые и достаточные условия сходимости. Был развит вариационный метод усреднения, близкий к методу Г-сходимости.

Изучение вопросов усреднения краевой задачи Неймана в произвольных перфорированных областях потребовало введения новых понятий: "сильно связных" и "слабо связанных" областей. Это было впервые сделано в работах Е.Я. Хруслова (1979, 1981). Им было показано, что краевая задача Неймана в сильно связных областях приводит к усредненным уравнениям такого же вида, как исходное, а в слабо связанных областях вид усредненного уравнения существенно меняется: оно может стать многокомпонентным или содержать интегральные по времени члены (модели с памятью для эволюционных уравнений). Эти результаты были распространены на краевые задачи с граничным условием 3-го рода (М.В. Гончаренко), краевые задачи в областях уменьшающегося объема (Е.В. Свищева). Вопросы усреднения краевых задач Дирихле и Неймана для нелинейных уравнений были исследованы в работах Л.С. Панкратова.

Е.Я. Хрусловым (совместно с Л.В. Берляндом) было исследовано асимптотическое поведение гармонических отображений плоских многосвязных областей с большим числом дырок, моделирующих сверхпроводящие композиты, и выведены усредненные уравнения для главного члена асимптотики. Были также построены усредненные модели электростатики и электродинамики в областях с густыми идеально проводящими сетками (Е.Я. Хруслов и М.В. Гончаренко).

Следует отметить еще один интересный класс задач, имеющий довольно любопытную физическую трактовку — задачи усреднения на римановых многообразиях сложной микроструктуры. Эти многообразия представляют собой, грубо говоря, некоторые базовые многообразия с большим числом тонких "ручек", малых "пузырей" и т. д. Первый результат по изучению решений дифференциальных уравнений на таких многообразиях был получен в работе Е.Я. Хруслова в 1997 г. (совместно с А. Буте-де-Монвель). Были построены усредненные уравнения на базовых многообразиях, описывающие асимптотическое поведение решений, когда число "ручек" и "пузырей" растет. Позже ими было исследовано асимптотическое поведение гармонических дифференциальных форм на таких многообразиях (1998). Эти результаты получили дальнейшее развитие в работах Е.Я. Хруслова, А.П. Паль-Валь и А.В. Храбустовского.

Усреднение дифференциальных операторов с сильно контрастными коэффициентами. Методы и понятия, введенные при изучении усредненных моделей краевых задач в сильно перфорированных областях, в работах Е.Я. Хруслова и В.Н. Фенченко (1980—1981) были применены для построения усредненных моделей уравнений с сильно контрастными коэффициентами. Сильно контрастными называются коэффициенты, которые зависят от малого параметра ε и при $\varepsilon \to 0$ стремятся к нулю (т. е. матрица коэффициентов вырождается) или к бесконечности на некоторых множествах $F^{\varepsilon} \subset \Omega$. Было доказано, что если коэффициенты уравнений стремятся к нулю на множествах $F^{\varepsilon} \subset \Omega$, разделяющих область Ω на сильно связные подобласти, то усредненная модель оказывается многокомпонентной. Если же коэффициенты растут при $\varepsilon \to 0$ на сильно связных множествах F^{ε}, емкость которых стремится к нулю, то усредненные модели становятся нелокальными. Позднее Е.Я. Хрусловым были рассмотрены нестационарные уравнения с вырождающейся (при $\varepsilon \to 0$) эллиптической частью или растущими коэффициентами при производной по времени и показано, что при этом возникают усредненные модели с памятью. Эти вопросы усреднения изложены в трех монографиях В.А. Марченко и Е.Я. Хруслова (1974, 2005, 2006).

Уравнения с вырождающейся эллиптической частью называются еще моделями сред с двойной пористостью, а уравнения с растущими коэффициентами — моделями армированных сред. Существенные результаты по усреднению моделей с двойной пористостью были получены Л.С. Панкратовым и В.А. Рыбалко.

Усредненные модели жидкостей с микроструктурой. К жидкостям со сложной микроструктурой относятся вещества как природного происхождения (например, кровь, мед, паутина), так и искусственного: коллоидные суспензии, магнитные жидкости, полимерные жидкости, резины. Такие вещества получают все более широкое применение в различных сферах человеческой деятельности, что обусловливает растущий интерес к изучению их свойств.

Простейшей микроскопической моделью таких веществ является смесь вязкой несжимаемой жидкости и мелких твердых частиц, взвешенных в ней. Частицы взаимодействуют с жидкостью (благодаря вязкости) и между собой (благодаря силам различной природы: упругим, ван-дер-ваальсовым, электростатическим и т. д.). Основная проблема состоит в построении макроскопических (усредненных) моделей, описывающих поведение таких смесей. Впервые эта задача была исследована Е.Я. Хрусловым и В.А. Львовым для суспензии невзаимодействующих между собой частиц. Было показано, что асимптотическое поведение таких суспензий описывается тремя качественно различными типами усредненных моделей, вид которых зависит от соотношения между размерами частиц и расстояниями между ними, а также от величины внешнего поля. Были получены соответствующие нелинейные уравнения и исследованы вопросы их разрешимости.

Первый результат по усреднению смесей с взаимодействующими частицами был получен Е.Я. Хрусловым в 2004 г. (совместно с Л.В. Берляндом), где был рассмотрен случай, когда диаметры частиц, расстояния между ближайшими частицами и силы взаимодействия между ними имеют один и тот же порядок ε. Было показано, что асимптотическое поведение таких смесей при $\varepsilon \to 0$ описывается усредненной однокомпонентной моделью, которую естественно считать макроскопической моделью несжимаемой полимерной жидкости. Эти результаты были перенесены М.А. Бережным на случай малых частиц некритических размеров.

В случае частиц критически малых диаметров (порядка $O(\varepsilon^3)$), асимптотическое поведение смеси оказывается качественно иным. Это было показано в работе М.А. Бережного и Е.Я. Хруслова в 2008 г. (совместно Л.В. Берляндом), в которой получена усредненная двухкомпонентная модель, описывающая движение двух взаимодействующих жидкостей — сжимаемой и несжимаемой.

Гидромеханика в условиях невесомости. Математические вопросы гидродинамики сверхтекучей жидкости

В связи с развитием космической техники в начале 60-х годов возрос интерес к задачам, связанным с поведением жидкостей в условиях невесомости. Во ФТИНТе соответствующие исследования с 1963 г. проводились отделом прикладной математики под руководством А.Д. Мышкиса, продолжались более 20 лет и охватывали широкий класс задач.

В первую очередь были исследованы вопросы равновесия жидких объемов в условиях невесомости с учетом капиллярных сил. Описаны классы равновесных форм жидкости в состоянии покоя или равномерного вращения в условиях полной невесомости или слабой гравитации (А.Д. Мышкис, Л.А. Слобожанин, А.Д. Тюпцов, М.А. Беляева/Свечкарева). Решены задачи о возмущении формы равновесной поверхности при малом изменении параметров системы. Был развит метод, позволяющий строить равновесные формы, близкие к известным. Так, была найдена форма осесимметричной односвязной поверхности покоящейся жидкости при малых числах Бонда по известному решению в условиях полной невесомости (когда число Бонда равно нулю), а также построена равновесная поверхность малой крутизны, когда в качестве невозмущенной системы бралась система с горизонтальной равновесной поверхностью.

Для получения эффективного критерия устойчивости равновесных состояний жидкости была исследована вторая вариация потенциальной энергии, получен спектральный признак устойчивости. Установлено влияние формы сосуда и угла смачиваемости на устойчивость равновесия жидкости. В частности, исследовано поведение осесимметричных форм равновесия, равновесие вращающейся капли и кольцеобразных фигур равновесия в условиях невесомости, устойчивость равновесных поверхностей в каналах (А.Д. Тюпцов). Было показано, что при некоторых критических значениях параметров происходит потеря устойчивости равновесного состояния. Однозначность непрерывного продолжения равновесного состояния может нарушаться, и возникает новый класс задач: ветвление неустойчивых равновесных состояний и определение запаса устойчивости системы (А.Д. Тюпцов, М.А. Свечкарева).

Следующий класс задач был связан с малыми колебаниями жидкости в сосуде. Получено операторное уравнение, описывающее малые колебания идеальной капиллярной жидкости. Показано, что спектр колебаний расщепляется на дискретный и непрерывный, доказаны теоремы полноты собственных и присоединенных векторов, изучены точки сгущения спектра. Разработаны методы расчета линейных колебаний идеальной жидкости в сосудах различной формы (Н.Д. Копачевский). Исследованы колебания жидкости в сосудах разной геометрии (цилиндрический канал, прямоугольный канал, конический сосуд, жидкий столб, шаровой слой); в сосудах, вращающихся с постоянной угловой скоростью; малые колебания вязкой жидкости, вращающейся в частично заполненном сосуде (Н.Д. Копачевский, Н.К. Радякин). Изучены свойства спектра линейных колебаний вязкой жидкости, в частности, изучены свободные колебания жидкого самогравитирующего шара, колебания маловязкой вращающейся жидкости; получены асимптотики частот колебаний при большой вязкости (Н.Д. Копачевский, А.Д. Мышкис).

Механизмы возникновения конвективных движений в неравномерно нагретой жидкости в условиях невесомости исследовались группой под руководством В.Г. Бабского. Такими механизмами могли быть термокапиллярный эффект — зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры, собственное гравитационное поле жидкости и элементов конструкции космического аппарата и т. п. Найдены границы устойчивости, а также изучено движение в закритических режимах. Все эти результаты были подытожены в монографии “Гидромеханика невесомости”, вышедшей в 1976 г. под ред. А.Д. Мышкиса.

После ухода части сотрудников (А.Д. Мышкиса, В.Г. Бабского, А.Д. Копачевского) задачами гидромеханики невесомости продолжал заниматься Л.А. Слобожанин, изучавший равновесные формы расплавленных металлов в космических условиях.

В середине 80-х годов, по инициативе Б.И. Веркина, А.Д. Тюпцов обратился к новым задачам, связанным с исследованием движения вращающейся сверхтекучей жидкости, в частности, равновесия и движения вихрей в сверхтекучем гелии. Эта деятельность, согласованная с общим направлением научных работ в институте, продолжалась и в последующие годы. Были исследованы условия возникновения квантованных вихрей во вращающихся цилиндрах и кольцах, изучено их движение; исследовано движение двумерной вихревой системы во вращающихся конденсатах Бозе—Эйнштейна; совместно с физиками отдела квантовых жидкостей и кристаллов выяснен энергетический спектр электронов над жидким гелием в пористых средах (Т.И. Зуева). Решен ряд задач, связанных с математическими моделями сверхтекучих жидкостей. В частности, доказаны теоремы существования критических точек функционала Гинзбурга—Ландау и исследовано их асимптотическое поведение в пределе малых длин когерентности (В.А. Рыбалко).